

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра механической обработки древесины

И.В. Яцун
О.Н. Чернышев

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕРЕВООБРАБОТКИ

Методические указания
к лабораторному практикуму для студентов
направления 250300 «Технология и оборудование лесозаготовительных
и деревоперерабатывающих производств»
Часть 1

Екатеринбург
2011

Печатается по рекомендации методической комиссии МТД.
Протокол № 10 от 6 октября 2010 г.

Рецензент: декан ф-та МТД, канд. техн. наук, доцент кафедры ДиСОД
Ю.И. Тракало

Редактор К.В. Корнева
Оператор компьютерной верстки Г.И. Романова

Подписано в печать 27.05.2011	Поз. 89
Плоская печать	Формат 60x84 1/16 Тираж 140 экз.
Заказ	Печ. л. 3,25 Цена 16 руб. 04 коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

Успешное решение задач по реформированию экономики невозможно без всестороннего повышения качества управления производственными процессами и технологическими объектами. Одним из способов достижения указанной цели, обоснования эффективных решений в организации и управлении производственной сферой является применение научных методов моделирования и оптимизации производственно-экономических и технологических ситуаций. Традиционные методы подготовки и функционирования производства все чаще вступают в противоречие с развитием техники и технологии. На современном этапе необходима разработка принципиально новых подходов, направленных на интенсификацию производства, повышение его эффективности.

Математическое моделирование технологических систем является мощным инструментом, позволяющим решать задачи оптимального выбора сырья, материалов, оборудования, проводить многовариантный анализ, обрабатывать технологические режимы, определять оптимальную стратегию ведения технологических процессов. Все это в целом позволяет уменьшить стоимость проектных работ на 2-5 %, снизить капитальные вложения на 1-2 %, уменьшить сроки оборачиваемости средств на 15-20 %. Гораздо больший эффект может принести математическое моделирование при оптимизации существующих технологий. Оно дает возможность специалистам, принимающим решения, повысить эффективность их предложений.

Молодой специалист, приступая к работе в отрасли, должен эффективно использовать свои знания по дисциплине в интересах принятия научно обоснованных решений при планировании и управлении производством. Знание методов моделирования и оптимизации производственно-экономических и технологических ситуаций, умение составлять и решать модели с помощью ЭВМ и грамотно анализировать результаты - обязательные условия творческой деятельности инженера.

Необходимость решения указанных задач непрерывно возрастает. Это объясняется тем, что при больших объемах производства даже незначительное усовершенствование в любой из этих областей может дать ощутимый экономический эффект. В то же время ущерб от неоптимального решения задачи может быть значительным.

Данный лабораторный практикум является руководством к выполнению лабораторных и практических заданий по дисциплине «Моделирование и оптимизация процессов деревообработки». При изложении материалов автор базировался на знаниях, полученных студентами при изучении дисциплин «Высшая математика», «Численные методы в расчетах на ЭВМ», «Методы решения оптимизационных задач», а также специальных дисциплин, изучаемых будущими инженерами-технологами по деревообработке. В первой части данных методических указаний приведены лабораторные практикумы с 1 по 4.

Лабораторный практикум № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОТВЕРЖДЕНИЯ КЛЕЯ. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ СКЛЕИВАНИЯ

Цель работы: получение зависимости изменения температуры клеевого слоя от времени прессования в производстве горячего склеивания шпона в производстве фанеры с последующим аналитическим определением продолжительности склеивания.

1. Общие сведения

Склеивание как способ соединения различных деталей, изготовленных из древесины и древесных материалов, находит самое широкое применение в деревообработке. Особо актуальным представляется правильное определение режима склеивания, в частности его продолжительности.

Как правило, продолжительность склеивания определяется экспериментальным путем. Однако существуют методики определения продолжительности склеивания аналитически. Рассмотрим одну из них.

2. Постановка задачи и алгоритм ее решения

Рассмотрим процесс математического моделирования с последующим определением продолжительности горячего склеивания шпона в производстве фанеры.

Процесс отверждения карбамидоформальдегидного клея при постоянной температуре описывается выражением:

$$T = T_0 e^{-\beta(t-t_0)}, \quad (1.1)$$

где T - продолжительность отверждения клея, с, при температуре t , °C;

T_0 - продолжительность отверждения клея при температуре t_0 , °C;

e - основание натурального логарифма;

β - некоторый постоянный коэффициент кривой отверждения.

На рис. 1.1 приведена типовая кривая отверждения карбамидоформальдегидного клея, построенная по уравнению (1.1).

Процесс отверждения клея в условиях воздействия переменных температур описывается выражением:

$$J = \int_0^{\tau} e^{\beta[t(\tau)-t_0]} d\tau = T_0, \quad (1.2)$$

где T_0 , t_0 , β - параметры кривой отверждения;

$t(\tau)$ - закон изменения температуры клеевого слоя (температура в функции времени);

τ - время, с.

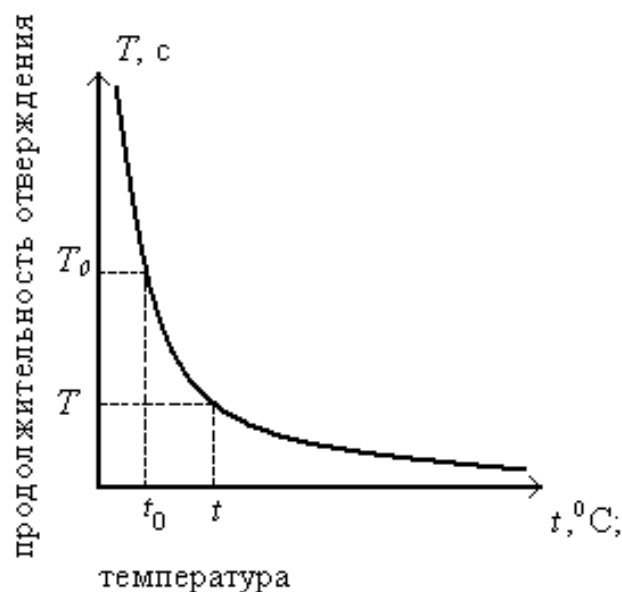


Рис. 1.1. Типовая кривая отверждения карбамидоформальдегидного клея

Последнее необходимо прокомментировать. Дело в том, что горячее склеивание шпона осуществляется в клеильном прессе при температуре плит 105-150 °С в зависимости от толщины и слойности склеиваемых пакетов.

Причем, пакет, загруженный в пресс, имеет температуру близкую к комнатной, т.е. около 20 °С. В процессе склеивания его температура возрастает, причем с различной интенсивностью для различных клеевых слоев. Очевидно, что с наименьшей скоростью осуществляется нагрев клеевых слоев, наиболее удаленных от плит пресса, поэтому процессы, связанные с отверждением клея, протекают в этих слоях также наиболее медленно. В этой связи при определении продолжительности склеивания принято ориентироваться на эти клеевые слои.

Выражение (1.2) представляет собой интеграл с переменным верхним пределом. Процесс склеивания считается завершенным, когда:

$$J = T_0, \quad (1.3)$$

$J = T_0$ при этом

$$\tau = \tau_{\text{скл.}}. \quad (1.4)$$

Выражение (1.2) относительно τ аналитически разрешено быть не может, однако, его можно численно проинтегрировать, используя, например, метод трапеций (рис. 1.2).

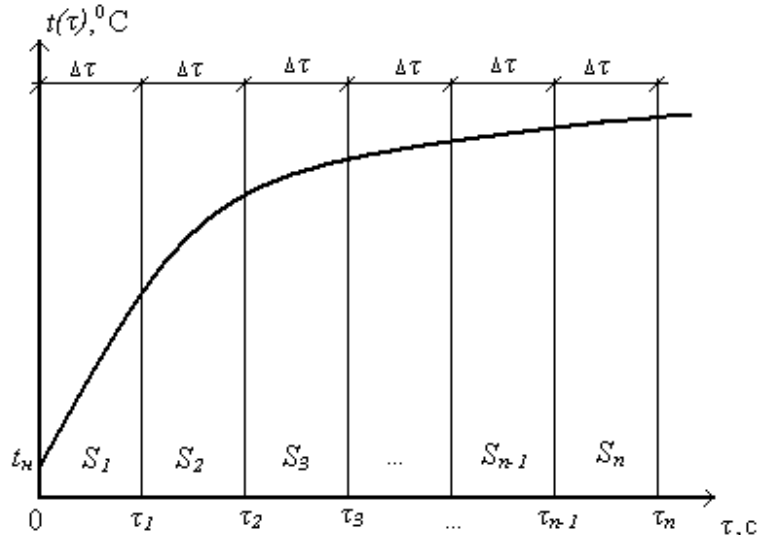


Рис. 1.2. Вычисление значений интеграла с переменным верхним пределом при помощи метода трапеций

Введем обозначения:

$$f(\tau_i) = e^{\beta(t(\tau) - t_0)}, \quad (1.5)$$

где $f(\tau_i)$ – функция температуры.

Значение интеграла при $\tau = \tau_1$ составляет:

$$J_1 = S_1 = \frac{f(\tau_1) + f(\tau_0)}{2} \cdot \Delta\tau, \quad (1.6)$$

где S_1 – площадь;

$\Delta\tau$ – шаг, с.

При любом значении времени τ_n :

$$J = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{f(\tau_i) + f(\tau_{i-1})}{2} \right] \cdot \Delta\tau. \quad (1.7)$$

Вычислительный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполняться:

$$J \geq T_0. \quad (1.8)$$

При этом продолжительность склеивания составляет:

$$\tau_{\text{скл.}} = \tau_n = \sum_{i=1}^n \Delta\tau_i. \quad (1.9)$$

Однако для решения задачи аналитического определения продолжительности склеивания необходимо иметь аналитическое описание кривой прогрева клеевого слоя, наиболее удаленного от плит пресса.

Процесс прогрева пакета при склеивании описывается одномерным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (1.10)$$

где t – температура, °C;

τ – время, час;

a – коэффициент температуропроводности, м²/час;

x – координата в направлении потока тепла, м.

Введем начальные и граничные условия, считая, что:

$t_n, t_{\text{п}}$ – температура плит пресса, °C;

t_n – начальная температура пакета, °C;

t – текущая температура в заданной точке сечения пакета, °C.

Тогда: при $\tau = 0$, $t = t_n$, $\tau = 0$, $t = t_n$;

при $\tau = \infty$, $t = t_{\text{п}}$, $\tau = \infty$, $t = t_n$;

при $x = 0$, $t = t_n$, $x = 0$, $t = t_n$;

при $x = S$, $t = t_n$.

Решив уравнение (1.10) при данных начальных условий, получим:

$$t(\tau) = t - \frac{4(t_n - t_n)}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \cdot \sin(2m+1) \frac{\pi x}{S_n} \cdot e^{-\frac{(2m+1)^2 \cdot \pi^2 \tau}{S_n^2}}, \quad (1.11)$$

где $m = 0, 1, 2$.

Выражение (1.11) представляется весьма сложным для практического применения, но значительно упрощается после замены бесконечной суммы тремя первыми членами. Ошибка вычислений при этом пренебрежимо мала.

3. Пример решения задачи

На фанерном предприятии изготавливают семислойную фанеру. Сырьем для ее изготовления является березовый шпон. Толщина готовой фанеры составляет 12 мм, параметры кривой отверждения: $T_0=550$ с, $\beta=0,045$. Требуется определить аналитически продолжительность отверждения клеевого слоя при горячем склеивании шпона.

Выберем параметры, относящиеся к конструкции пакета фанеры, его свойствам и режиму склеивания. Схема сборки пакета: $1,8 \times 4 + 2,2 \times 3$; температура плит пресса равна 110 °C, коэффициента температуропроводности $a=1,666 \cdot 10^{-7}$ м²/с.

Толщина пакета $S_n=13,8$ мм и расстояние до наиболее удаленного клеевого слоя в пакете $x=5,8$ мм (рис. 1.3).

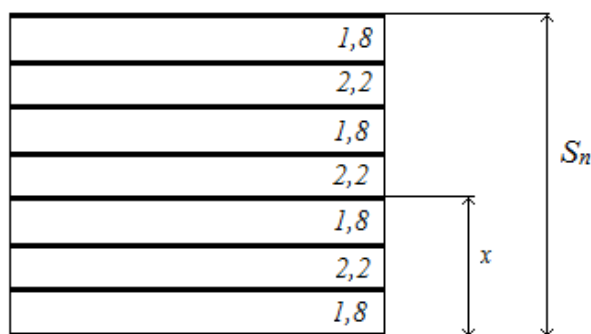


Рис. 1.3. Схема сборки пакета фанеры

Подставим найденные значения в формулу (1.11), упростим и получим зависимость температуры изменения температуры клеевого слоя в зависимости от времени прессования пакета фанеры.

$$\begin{aligned}
 t(\tau) = & 110 - \frac{4(110 - 20)}{3,14} \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} \cdot \sin(2 \cdot 0 + 1) \frac{3,14 \cdot 5,8}{13,8} e^{-\frac{(2 \cdot 0 + 1)^2 \cdot 1,666 \cdot 10^{-7} \cdot 3,14^2 \tau}{0,0138^2}} + \\
 & + \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \cdot \sin(2 \cdot 1 + 1) \frac{3,14 \cdot 5,8}{13,8} e^{-\frac{(2 \cdot 1 + 1)^2 \cdot 1,666 \cdot 10^{-7} \cdot 3,14^2 \tau}{0,0138^2}} + \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} \sin(2 \cdot 2 + 1) \times \\
 & \times \frac{3,14 \cdot 5,8}{13,8} e^{-\frac{(2 \cdot 2 + 1)^2 \cdot 1,666 \cdot 10^{-7} \cdot 3,14^2 \tau}{0,0138^2}} = 110 - 114,65 \cdot 0,968 e^{-0,0086 \tau} - 0,243 e^{-0,077 \tau} + \\
 & + 0,062 e^{-0,215 \tau}.
 \end{aligned}$$

Используя метод трапеций, определяем продолжительность склеивания пакета шпона (табл. 1.1). Для этого весь временной участок разделим на равные промежутки времени Δ . На каждом временном промежутке увидим, как будет изменяться температура клеевого слоя. Вычисления будут продолжаться до тех пор, пока не выполниться условие $J_i \geq T_0$. Начальную температуру отверждения клеевого слоя t_0 t_0 будем считать равной 70 °С. Вычисления можно провести с использованием прикладной компьютерной программы Excel.

Таблица 1.1

Расчет продолжительности склеивания пакета шпона
методом трапеций

τ , с	$t(\tau)$, °С	$e^{\beta(t(\tau)-t_0)}$	S_i	J_i
0	19,8	0,104	-	-
30	27,1	0,145	3,736	3,77
60	44,1	0,311	6,831	10,57
90	58,8	0,605	13,742	24,31
120	70,5	1,021	24,395	48,71
150	79,5	1,529	38,264	86,97
180	86,4	2,091	54,322	141,29
210	91,8	2,663	71,316	212,61
240	95,9	3,209	88,081	300,69
270	99,1	3,707	103,74	404,43
300	101,6	4,144	117,76	522,19
330	103,5	4,516	129,89	652,08

Выберем масштаб и построим по полученным данным (см. табл. 1.1) кривую отверждения (рис. 1.4).

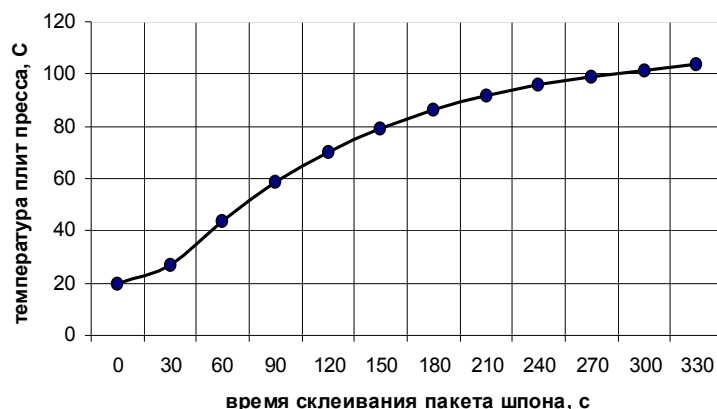


Рис. 1.4. Определение продолжительности склеивания пакета шпона

Расчетная продолжительность склеивания пакета шпона составила 5,5 минут. Согласно табл. 1.2 для склеивания двенадцатимиллиметровой фанеры из шпона лиственных пород продолжительность склеивания колеблется в пределах от 5 до 8 минут.

4. Задания для индивидуального решения

На фанерном предприятии изготавливают многослойную фанеру. Сырьем для ее изготовления является шпон. Толщина готовой фанеры, ее слойность и параметры кривой отверждения T_0 , β приведены в табл. 1.3. Рекомендуемые схемы сборки пакетов приведены в табл. 1.4. Для создания формоустойчивой конструкции фанеры при составлении пакета листы шпона должны укладываться симметрично относительно центра, поэтому в табл. 1.4 можно выделить четыре варианта сборки пакета. Подробно схемы сборки пакетов изображены на рис. 1.5. Рекомендуемая температура плит пресса при склеивании пакетов шпона карбамидоформальдегидным клеем и значение коэффициента температуропроводности для различных пород древесины приведены соответственно в табл. 1.5 и табл. 1.6. Требуется аналитически определить продолжительность отверждения клеевого слоя при горячем склеивании шпона.

Таблица 1.2

Продолжительность склеивания шпона
карбамидоформальдегидными клеями

Толщина фанеры, мм	Количество листов в одном промежутке, шт.	Продолжительность склеивания, мин, для древесины	
		лиственных пород	хвойных пород
8	1	6,0-4,0	6,0-4,0
9	1	6,5-4,0	6,5-4,5
10	1	7,0-4,5	7,0-4,5
12	1	8,0-5,0	9,0-6,5
15	1	10,5-6,5	11,0-8,0
18	1	13,0-9,0	14,0-10,5

Таблица 1.3

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Толщина фанеры, мм	Слойность фанеры	Порода древесины	T_0 , с	β
1	9	7	тополь	400	0,06
2	9	7	ольха	550	0,045
3	10	9	береза	550	0,05
4	8	7	лиственница	400	0,06
5	12	7	кедр	600	0,045
6	12	7	ель	600	0,045
7	15	11	лиственница	500	0,055
8	12	9	ольха	600	0,05
9	9	5	кедр	550	0,05
10	9	7	сосна	400	0,05
11	12	9	кедр	600	0,06
12	9	5	ель	450	0,045
13	8	7	кедр	550	0,045
14	12	9	лиственница	500	0,06
15	12	7	тополь	450	0,055
16	10	9	ольха	400	0,045
17	18	13	береза	600	0,055
18	10	9	кедр	550	0,06
19	9	7	береза	450	0,045
20	15	11	кедр	600	0,06
21	18	13	сосна	500	0,045
22	15	9	ольха	600	0,05
23	18	13	ель	450	0,06
24	10	9	лиственница	450	0,055
25	12	9	тополь	500	0,05

Таблица 1.4

Рекомендуемые схемы сборки пакета

Вариант схемы сборки	Толщина фанеры, мм	Слойность	Толщина шпона, мм, и слойность
1	8	7	1,15×2+1,5×5
2	8	5	1,5×3+2,4×2
1	2	3	4
3	9	7	1,5×7
4	9	5	1,8×4+3,4
2	10	9	1,15×5+1,5×4
3	12	9	1,5×9
2	12	7	1,8×4+2,2×3
3	15	11	1,5×11
2	15	9	1,5×4+2,2×5
3	18	13	1,5×13
2	18	11	1,5×6+2,2×5

Таблица 1.5

Рекомендуемая температура плит пресса при склеивании пакетов шпона карбамидоформальдегидным клеем

Слойность	Температура плит пресса, °С, для древесины	
	лиственных пород	хвойных пород
5	115-120	110-115
7 и более	110-115	105-110

Таблица 1.6

Значение коэффициента температуропроводности для различных пород древесины

Порода древесины	Значение коэффициента, α , м ² /с
кедр	$1,35 \cdot 10^{-7}$
ель, тополь	$1,366 \cdot 10^{-7}$
сосна	$1,45 \cdot 10^{-7}$
ольха	$1,5 \cdot 10^{-7}$
береза	$1,666 \cdot 10^{-7}$
лиственница	$1,749 \cdot 10^{-7}$

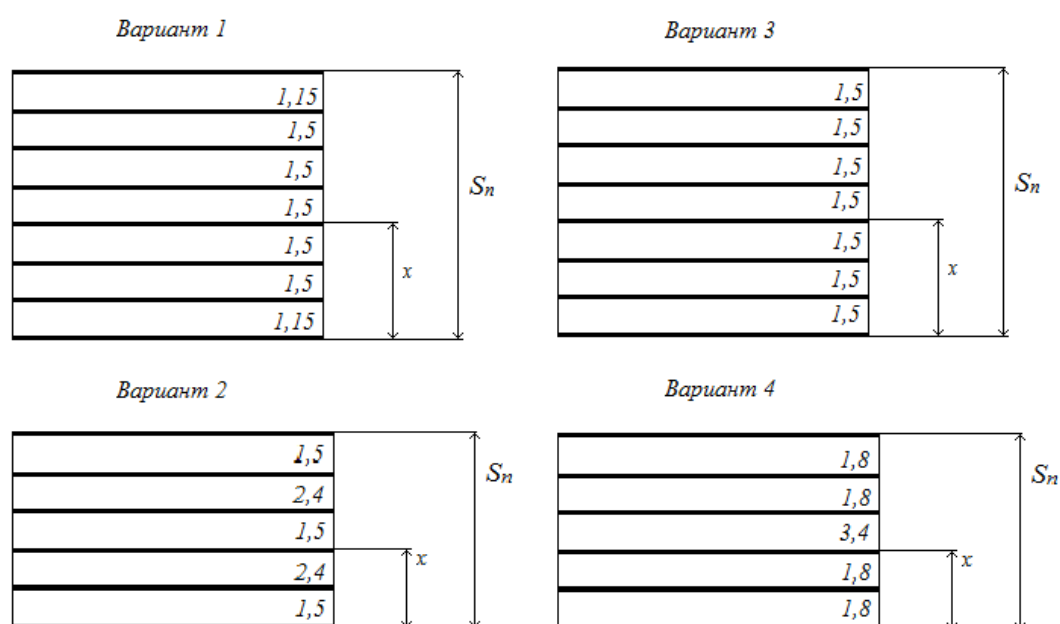


Рис. 1.5. Рекомендуемые варианты схем сборки пакетов

5. Методические указания к выполнению работы

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

- 1) определить исходные данные для решения задачи: толщину и слойность фанеры, породу древесины, параметры кривой отверждения;

2) выбрать параметры, относящиеся к конструкции пакета, его свойствам и режиму склеивания: толщину шпона и схему набора пакета, температуру плит пресса при склеивании, значение коэффициента температуропроводности;

3) определить толщину пакета и расстояние от плит пресса до наиболее удаленного клеевого слоя в пакете;

4) построить кривую отверждения;

5) определить расчетную продолжительность склеивания и сравнить ее с рекомендуемой продолжительностью склеивания по технологическому режиму, сделать выводы по работе;

6) оформить и защитить отчет по работе.

6. Контрольные вопросы

1. Чем отличается процесс отверждения карбамидоформальдегидного клея в условиях воздействия постоянной и переменной температуры?

2. Почему при определении продолжительности склеивания пакета следует ориентироваться на наиболее удаленные от плит пресса клеевые слои? Как их определить?

3. В чем заключается метод трапеций при определении продолжительности склеивания пакета шпона в производстве фанеры?

4. Каким уравнением описывается процесс прогрева пакета при склеивании?

Лабораторный практикум № 2

ЗАДАЧА ФОРМИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ПРОГРАММЫ ПРЕДПРИЯТИЯ

Цель работы: определение производственной программы предприятия, оптимальной по отношению к принятому критерию в условиях ограничения ресурсов, выполнения планового заказа и требований рынка.

1. Общие сведения

Разработка плана производства и размещения продукции является одной из наиболее важных задач плановой деятельности предприятий. В последнее время каждому предприятию предоставляется значительно большая, чем ранее, самостоятельность в определении своей хозяйственной политики, в выборе ассортимента и объемов выпускаемой продукции, в решении этих вопросов на основе прямых связей с потребителями и поставщиками.

Подходы к задаче и построение моделей являются общими для предприятий и сводятся к выбору критерия оптимальности и ограничений. Критерии могут быть различными в зависимости от складывающихся на

предприятию конкретных условий: объем выпуска товарной продукции в натуральном выражении, прибыль предприятия, общие затраты на выпуск продукции, себестоимость продукции и т.п. В качестве ограничений выступают все лимитированные ресурсы: сырье, материалы, топливо, электроэнергия, вода, зарплата, оборудование и т.д. В модели могут учитываться также ограничения, вытекающие из реальных условий функционирования предприятия: объемы выпуска планового заказа, объемы поставок по договорам, объемы выпуска отдельных видов продукции по договорам с торговыми организациями, исходящие из условий реализации, и т.д.

В условиях полного хозяйственного расчета и самофинансирования наблюдается тенденция перехода к критериям, связанным с показателями прибыли предприятий. В некоторых случаях целесообразно многократное решение задачи (каждый раз с другими критериями, последующим анализом результатов и выбором на основе логических сравнений и сопоставлений того из них, который наиболее удовлетворяет экономической ситуации).

Если изменения критерия и ограничений в зависимости от изменения переменных имеют линейный характер, то экономико-математическая модель сводится к задаче линейного программирования. В результате реализации такой модели определяется оптимальный по отношению к выбранному критерию план выпуска продукции.

2. Алгоритм решения задачи

2.1. Постановка задачи

Предприятие имеет ресурсы m видов с текущим индексом i ($i=1 \dots m$) и выпускает продукцию n типов с текущим индексом j ($j=1 \dots n$). Запасы ресурса i -го вида составляют d_i . Для выпуска продукции j -го типа ресурс i -го вида расходуется в количестве a_{ij} .

При реализации единицы продукции j -го типа образуется прибыль в размере C_j . Контрольные цифры по выпуску продукции j -го типа составляют b_j .

Определить x_j - количество продукции j -го типа, которое нужно выпустить, чтобы иметь максимальную прибыль.

2.2. Построение математической модели

Математическая модель должна учитывать основные параметры, влияющие на результат. Если при определении оптимальной производственной программы в качестве критерия принята прибыль, тогда целевая функция задачи L формируется следующим образом:

$$L = \sum_{j=1}^n C_j x_j \rightarrow \max. \quad (2.1)$$

В качестве ограничений выступают:

1) расход сырья (материалов) каждого вида на выпуск всей продукции. Он не может превышать размер имеющихся запасов сырья (материалов):

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq d_i, \quad (2.2)$$

2) обязательность выполнения планового задания:

$$x_1 \geq b_1, x_2 \geq b_2, \dots, x_n \geq b_n, \quad (2.3)$$

3) ограничения на неотрицательность переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (2.4)$$

В матрично-векторной форме модель оптимизации имеет вид:

$$\begin{aligned} \max C^T, \\ AX \leq D, \\ X \geq B, \\ X \geq 0; \end{aligned} \quad (2.5)$$

1) вектор значений целевой функции

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

2) вектор управляющих факторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

3) матрица значений ресурсов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

4) вектор запасов ресурсов

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_m \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

5) вектор контрольных цифр

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

2.3. Алгоритм решения задачи графическим способом

Известно, что задачи линейного программирования при небольшом количестве переменных легко геометрически интерпретируются. Для решения задачи графическим способом необходимо выполнить следующие действия:

- записать математическую модель задачи, включающую целевую функцию и ограничения в виде неравенств;
- переписать ограничения в виде равенств и построить соответствующие полученным уравнениям прямые на координатной плоскости;
- заштриховать область допустимых решений (ОДР), т.е. область координатной плоскости, в которой выполняются все ограничения задачи;
- построить градиент целевой функции;
- построить прямую $L = \text{const}$, перпендикулярную вектору градиента;
- перемещать прямую $L = \text{const}$ в направлении градиента целевой функции до тех пор, пока не останется только одна общая точка, принадлежащая одновременно ОДР и данной прямой. Эта точка, наиболее удаленная в направлении градиента функции, и является искомой **точкой оптимума**;
- определить, на пересечении каких прямых лежит точка оптимума, и вычислить ее координаты, решив совместно систему уравнений данных прямых.

2.4. Алгоритм решения задачи симплекс-методом

Идея метода содержит три существенных момента:

- 1) указывается способ вычисления исходной программы;
- 2) устанавливается признак, позволяющий проверять выбранную программу на оптимальность;
- 3) указывается способ, позволяющий по выбранной программе построить другую, более близкую к оптимальной.

Выполнив конечное число повторяющихся математических вычислений (итераций), можно получить оптимальную программу (план). Исходя из этого, данный метод называется методом последовательного улучшения плана.

Для упрощения расчетов строят последовательные симплекс-таблицы (табл. 2.1).

В табл. 2.1 введены следующие обозначения: C_j - коэффициенты целевой функции; C_i - коэффициенты целевой функции при базисных неизвестных; P_i - наименование базисных неизвестных; B - неотрицательные значения ограничений (b_1, b_2, \dots, b_m); β - симплексное отношение, показывающее величину отношения значений ограничений (b_1, b_2, \dots, b_m) в столбце B к элементам a_{ij} в разрешающем столбце матрицы условий, которая включает все коэффициенты из симплексных уравнений, отражающих ограничения; a_{ij} - элементы j -го столбца, равные нормам расхода ресурсов (сырья, материалов, электроэнергии, пара и т.д.); L - значение целевой функции; Δ_{ij} - двойственная оценка.

Таблица 2.1

Форма симплекс-таблицы

—	—	C_j	—	—	—	—	—	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
—	—	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	—
—	—	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	—
—	—	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	—
—	—	L	—	—	—	—	—	Δ_{ij}

Для решения задачи симплекс-методом необходимо выполнить следующие действия:

1) заполнить первую симплексную таблицу в соответствии с приведенной выше формой;

2) рассчитать в каждом столбце значение двойственной оценки Δ_{ij} по формуле:

$$\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^m C_i a_{ij} - C_j \quad (j = 1 \dots n); \quad (2.11)$$

3) при решении задачи максимизации в качестве разрешающего столбца выбрать тот, для которого двойственная оценка Δ_{ij} отрицательна и в котором имеются положительные элементы. Если данным требованиям удовлетворяют сразу несколько столбцов симплексной таблицы, то в качестве разрешающего выбирают столбец с максимальным по модулю отрицательным значением Δ_{ij} . При решении задачи минимизации в качестве разрешающего столбца выбирают тот, которому соответствует максимальная положительная двойственная оценка Δ_{ij} и в котором имеются положительные элементы;

4) найти симплексное отношение в каждой строке. Симплексное отношение получают делением элементов столбца B на положительные элементы разрешающего столбца. В строках, где элементы разрешающего столбца отрицательны или равны нулю, в графе симплексного отношения ставят прочерк;

5) выбрать базисную неизвестную, которая подлежит, заменить. Данная неизвестная находится в строке с наименьшим положительным симплексным отношением. Строку, содержащую наименьшее симплексное отношение называют **разрешающей строкой**. Экономический смысл этой операции состоит в следующем. В столбце **B** представлены ресурсы, в разрешающем столбце – нормы их расхода. В результате деления элементов столбца **B** на элементы разрешающего столбца получают количество продукции, которое можно изготовить из имеющихся ресурсов. Если в новой программе предусмотреть выпуск максимального количества изделий, то других ресурсов для их выпуска не хватит. При выборе разрешающей строки не принимают во внимание строки, на пересечение которых с разрешающим столбцом находятся нулевые или отрицательные элементы, так как в этом случае при делении элементов столбца **B** на отрицательные элементы получился бы выпуск отрицательного количества продукции, а при делении на нулевые элементы – выпуск бесконечно большого количества продукции;

6) элемент, находящийся на пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки, называется **разрешающим элементом**;

7) преобразование старой симплекс-таблицы начать с пересчета элементов разрешающей строки. Для этого все элементы, включая элементы в столбце **B**, делят на разрешающий элемент. Полученные значения заносят в подготовленную новую симплексную таблицу.

8) элементы разрешающего столбца приравнивают к нулю, за исключением разрешающего элемента, на месте которого при пересчете разрешающей строки уже получена единица;

9) все остальные элементы таблицы, включая элементы столбца **B** и двойственные оценки Δ_{ij} пересчитать по правилу прямоугольника. Это правило состоит в следующем. Мысленно вычерчивается прямоугольник. В одной из его вершин находится элемент, который необходимо пересчитать, а в противоположной по диагонали вершине – разрешающий элемент. Например, если необходимо пересчитать значение элемента a_{23} , то разрешающим является элемент a_{11} (рис. 2.1).

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}

Рис. 2.1. Правило прямоугольника

Новое значение элемента a_{23} рассчитывается по формуле:

$$a' = \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}}; \quad a'_{23} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}} \quad (2.12)$$

10) признаком оптимальности опорного решения является отсутствие отрицательных двойственных оценок при решении задачи максимизации или отсутствие положительных двойственных оценок при решении задачи минимизации.

3. Пример постановки и решения задачи

Предприятию необходимо изготовить фанеру двух видов (марок ФК и ФСФ) в количестве P_1 и P_2 соответственно. Для этого необходимы материальные и трудовые ресурсы, представленные в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Наименование ресурсов

Ресурс	Норма расхода ресурса на 1 м ³ фанеры марки		Общее количество ресурса
	ФК	ФСФ	
сырье березовое, м ³	2,6	2,6	260
смола фенолоформальдегидная, кг	-	90	2800
смола карбамидоформальдегидная, кг	80	-	6000
технологическая трудоемкость, чел.-ч	15	16	900

Прибыль от реализации 1 м³ фанеры марки ФК и ФСФ составляет 10 и 12 ден. ед. соответственно. Спрос на фанеру марки ФК составляет 50 м³ и марки ФСФ – 40 м³.

Решение начинаем с формирования математической модели.

Целевая функция:

$$L=10x_1 + 12x_2 \rightarrow \max. \quad (2.13)$$

Ограничения:

1) по запасам ресурсов:

- по березовому сырью: $2,6x_1 + 2,6x_2 \leq 260;$ (2.14)

- по фенолоформальдегидной смоле: $0x_1 + 90x_2 \leq 2800;$ (2.15)

- по карбамидоформальдегидной смоле: $80x_1 + 0x_2 \leq 6000;$ (2.16)

- по трудоемкости: $15x_1 + 16x_2 \leq 900;$ (2.17)

2) по спросу на продукцию:

$$x_1 \geq 50; \quad x_2 \geq 40; \quad (2.18)$$

3) на неотрицательность решения:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (2.19)$$

В матрично-векторной форме модель оптимизации будет иметь вид:

1) вектор значений целевой функции

$$C = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

2) вектор управляющих факторов

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}, \quad (2.21)$$

3) матрица значений ресурсов

$$A = \begin{vmatrix} 2,6 & 2,6 \\ 0 & 90 \\ 80 & 0 \\ 15 & 16 \end{vmatrix}, \quad (2.22)$$

4) вектор запасов ресурсов

$$D = \begin{vmatrix} 260 \\ 2800 \\ 6000 \\ 900 \end{vmatrix}, \quad (2.23)$$

5) вектор контрольных цифр

$$B = \begin{vmatrix} 50 \\ 40 \end{vmatrix}. \quad (2.24)$$

Итак, получена первоначальная модель задачи, состоящая из целевой функции и восьми ограничений. Математически задачу можно сформулировать следующим образом. При решении системы неравенств (2.14)-(2.19) необходимо найти такие значения переменных, при которых целевая функция (2.13) принимает максимальное значение.

Для решения графическим методом построим на координатной плоскости прямые, соответствующие ограничениям задачи (рис. 2.2), записанным в виде равенств:

$$\begin{aligned} 2,6x_1 + 2,6x_2 &= 260 \text{ (прямая 1),} \\ 0x_1 + 90x_2 &= 2800 \text{ (прямая 2),} \\ 80x_1 + 0x_2 &= 6000 \text{ (прямая 3),} \\ 15x_1 + 16x_2 &= 900 \text{ (прямая 4),} \\ x_1 &= 50 \text{ (прямая 5);} \\ x_2 &= 40 \text{ (прямая 6);} \\ x_1 &= 0 \text{ (прямая 7);} \\ x_2 &= 0 \text{ (прямая 8).} \end{aligned}$$

Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости. Координаты любой точки, принадлежащей одной из них, удовлетворяют исходному неравенству, координаты точек другой полуплоскости – нет. Стрелками показаны полуплоскости, в которых условия неравенств выполняются. Можно видеть, что все они одновременно выполняются только в заштрихованной области (многоугольник OABCD). Следовательно, данная область является областью допустимых решений (ОДР), т.е. решение задачи находится в точке, принадлежащей многоугольнику OABCD.

Итак, все точки области OABCD удовлетворяют всем ограничениям математической модели задачи, но лишь в одной из этих точек целевая функция L принимает максимальное значение. Для того чтобы найти точку максимума функции L , необходимо построить градиент функции \vec{L} , т.е.

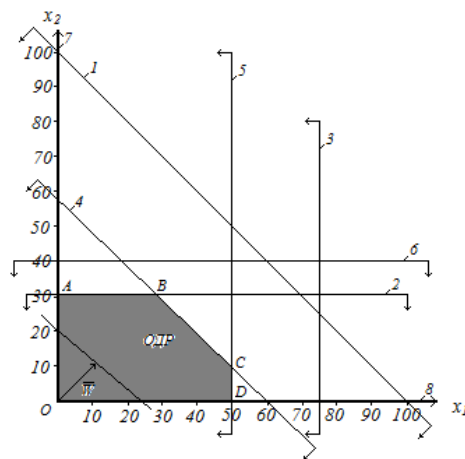


Рис. 2.2. Геометрическая интерпретация решения задачи линейного программирования

вектор, который показывает направление наиболее быстрого возрастания функции. Данный вектор проходит через точку (0;0) и точку (10;12). Теперь необходимо построить прямую целевой функции: $L = 10x_1 + 12x_2$, выбрав любое значение $L = \text{const}$, при котором прямая имеет общие точки с областью допустимых решений. Так например, на рис. 2.2 построена прямая целевой функции при значении $L = 240$. Перемещаем данную прямую в направлении вектора \vec{L} до пересечения с последней точкой многоугольника OABCD. В рассмотренном примере это точка B, координаты которой являются решением задачи. Их находят путем совместного решения уравнений прямых, на пересечении которых находится точка B, т.е. прямой 2 и прямой 4:

$$\begin{aligned} 0x_1 + 90x_2 &= 2800; \\ 15x_1 + 16x_2 &= 900. \end{aligned}$$

При решении системы уравнений получаем $x_1 = 26,8$; $x_2 = 31,1$.

Вычислим целевую функцию при данных значениях переменных:

$$L = 10 \cdot 26,8 + 12 \cdot 31,1 = 641,2.$$

Итак, максимальная прибыль равна 641,2 ден. ед., будет получена при изготовлении фанеры марки ФК в объеме 26,8 м³ и марки ФСФ в объеме 31,1 м³.

Теперь решим эту же задачу симплекс-методом. В условии задачи ограничения (2.14)-(2.18) представлены в виде линейных неравенств. Преобразуем их в эквивалентные уравнения. Для этого в неравенства введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 и x_8 . Тогда ограничения примут вид линейных уравнений:

$$2,6x_1 + 2,6x_2 + x_3 = 260; \quad (2.25)$$

$$0x_1 + 90x_2 + x_4 = 2800; \quad (2.26)$$

$$80x_1 + 0x_2 + x_5 = 6000; \quad (2.27)$$

$$15x_1 + 16x_2 + x_6 = 900; \quad (2.28)$$

$$x_1 + 0x_2 + x_7 = 50; \quad (2.29)$$

$$0x_1 + x_2 + x_8 = 40. \quad (2.30)$$

Экономическое содержание дополнительных переменных в данном случае следующее. Переменные x_3, x_4, x_5, x_6 – это неиспользованные ресурсы соответственно березового сырья, фенолоформальдегидной смолы, карбамидоформальдегидной смолы и технологической трудоемкости. Переменные x_7 и x_8 – выполнение условий по ограничению выпуска продукции в связи с ее спросом и наличием на предприятии ресурсов.

Дополнительные переменные, также как и основные, должны быть неотрицательны.

Целевая функция в условии задачи, приведенная к каноническому виду, представляется в расширенном виде:

$$L = 10x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \rightarrow \max.$$

Представленная система линейных уравнений (2.25)-(2.30) имеет множество решений. Нас интересует лишь такое, которое обеспечивало бы получение максимальной суммарной прибыли от реализации продукции. Задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти такое неотрицательное решение системы линейных уравнений, при котором целевая функция достигает максимального значения.

Решение задачи симплекс-методом представлено в табл. 2.3-2.5.

Таблица 2.3

Первая итерация

C_j			10	12	0	0	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_3	260	2,6	2,6	1	0	0	0	0	0	100
0	x_4	2800	0	90	0	1	0	0	0	0	31,1
0	x_5	6000	80	0	0	0	1	0	0	0	-
0	x_6	900	15	16	0	0	0	1	0	0	56,25
0	x_7	50	1	0	0	0	0	0	1	0	-
0	x_8	40	0	1	0	0	0	0	0	1	40
$L=0$			-10	-12	0	0	0	0	0	0	Δ_{ij}

Таблица 2.4

Вторая итерация

C_j			10	12	0	0	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_3	179	2,6	0	1	-0,03	0	0	0	0	68,8
12	x_2	31,1	0	1	0	0,01	0	0	0	0	-
0	x_5	6000	80	0	0	0	1	0	0	0	75
0	x_6	402,2	15	0	0	-0,18	0	1	0	0	26,8
0	x_7	50	1	0	0	0	0	0	1	0	50
0	x_8	8,9	0	0	0	-0,01	0	0	0	1	-
$L=373,3$			-10	0	0	0,13	0	0	0	0	Δ_{ij}

Таблица 2.5

Третья итерация

—	—	C_j	10	12	0	0	0	0	0	0	β
C_i	P_i	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
0	x_3	109,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	x_2	31,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	x_5	3854,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	x_1	26,8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	x_7	23,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0	x_8	8,9	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$L=641,2$			0	0	0	0,015	0	0,67	0	0	Δ_{ij}

Анализируя данные табл. 2.4, можно увидеть, что максимальная прибыль, равная 641,2 ден. ед., будет получена при изготовлении, реализации фанеры марки ФК в объеме 26,8 м³ и марки ФСФ в объеме 31,1 м³. При производстве полностью будет использована фенолоформальдегидная смола x_4 и трудоемкость x_6 . Неиспользованными останутся березовое сырье x_3 в объеме 109,3 м³ и карбамидоформальдегидная смола x_5 в объеме 3854,9 кг. Спрос на фанеру марки ФК будет удовлетворен на 53,6 %, а на фанеру марки ФСФ – на 77,8 %.

4. Задания для индивидуального решения

Вариант 1. Предприятие производит лущеный шпон двух толщин. При его изготовлении расходуют сырье березовое, пар, электроэнергию и трудовые ресурсы. Нормы их расхода, необходимые для изготовления 1 м³ лущеного шпона каждой толщины, известны. Предприятие получает прибыль от реализации 1 м³ одной и второй толщин в размере соответственно C_1 и C_2 ден. ед. Требуется определить план выпуска шпона каждого вида, при котором затраты на его изготовление не превышали бы допустимого

ресурса и была бы получена наибольшая прибыль. Исходные данные для выполнения задачи взять из табл. 2.6.

Таблица 2.6

Исходные данные для выполнения задания

Наименование используемых ресурсов	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса	Наименование по- лучаемой продукции		Запас ресурса
	шпон тол- щиной S_1	шпон тол- щиной S_1		шпон толщи- ной S_1	шпон толщи- ной S_1	
	Вариант 1.1			Вариант 1.2		
сырье березовое, м ³	1,6	1,8	1800	1,72	1,63	1720
пар, кг/м ³	92	138	110400	105	120	115500
электроэнергия, кВт·ч/м ³	3	2,7	2400	1,7	3,4	2040
технологическая трудоемкость, чел.·ч	6	8,7	6000	5,1	5,2	4590
прибыль от реализации 1 м ³ , ден. ед.	10	12	-	12	14	-
Вариант 1.3			Вариант 1.4			
сырье березовое, м ³	1,64	1,44	1640	1,58	1,7	1580
пар, кг/м ³	94	125	112800	90	81	81000
электроэнергия, кВт·ч/м ³	3,1	3,48	2480	3,0	4,2	3300
технологическая трудоемкость, чел.·ч	6,2	12,4	8680	6,0	12	7200
прибыль от ре- ализации 1 м ³ , ден. ед.	14	20	-	12	18	-

Вариант 2. Предприятие производит строганный шпон из древесины двух пород: дуба и ясеня. При его изготовлении расходуется сырье дубовое и ясеневое, пар, электроэнергия и трудовые ресурсы. Нормы их расхода, необходимые для изготовления 1000 м^2 шпона указанных пород известны. Предприятие получает прибыль от реализации 1000 м^3 шпона каждой по-
роды в размере соответственно C_1 и C_2 ден. ед. Требуется определить план выпуска шпона каждой породы, при котором затраты на его изготовление

не превышали бы допустимого ресурса и была бы получена наибольшая прибыль. Исходные данные для выполнения задачи взять из табл. 2.7.

Таблица 2.7

Исходные данные для выполнения задания

Наименование используемых ресурсов	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса
	шпон дубо- вый	шпон ясене- вый		шпон дубо- вый	шпон ясене- вый	
	Вариант 2.1			Вариант 2.2		
сырье дубовое, м ³	2,26	-	30000	2,06	-	35000
сырье ясеновое, м ³	-	1,84	20000	-	1,735	25000
пар, кг/м ³	1880	1600	30•10 ⁶	1800	1400	32,4•10 ⁶
электроэнергия, кВт·ч/м ³	75	75	15•10 ⁵	64	60	12•10 ⁵
технологическая трудоемкость, чел.·ч	6,4	5,0	8,96•10 ⁴	8,0	9,8	17,6•10 ⁴
прибыль от реали- зации 1 м ³ , ден. ед.	80	70	-	100	90	-
Вариант 2.3			Вариант 2.4			
сырье дубовое, м ³	1,90	-	38000	1,77	-	40000
сырье ясеновое, м ³	-	1,63	30000	-	1,54	35000
пар, кг/м ³	1630	1350	35,86•10 ⁶	1580	1460	37,92•10 ⁶
электроэнергия, кВт·ч/м ³	60	65	14,4•10 ⁵	58	68	15,08•10 ⁵
технологическая трудоемкость, чел.·ч	5,8	4,35	10,44•10 ⁴	5,4	10,0	15,12•10 ⁴
прибыль от реали- зации 1 м ³ , ден. ед.	120	110	-	170	140	-

Вариант 3. Предприятие производит фанеру марки ФСФ и бакелизиро-
ванную. При ее изготовлении расходуется сырье березовое, электро-
энергия, условное топливо и трудовые ресурсы. Нормы их расхода, необ-
ходимые для изготовления 1 м³ фанеры каждого вида, известны. Предпри-
ятие получает прибыль от реализации 1 м³ фанеры ФСФ и бакелизирова-
нной в размере соответственно C_1 и C_2 ден. ед. Требуется определить план
выпуска фанеры каждого вида, при котором затраты на его изготовление
не превышали бы допустимого ресурса и была бы получена наибольшая
прибыль. Исходные данные для выполнения задачи взять из табл. 2.8.

Таблица 2.8

Исходные данные для выполнения задания

Наименование используемых ресурсов	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса
	фанера ФСФ	фанера бакели- зиро- ванная		фанера ФСФ	фанера бакели- зиро- ванная	
Вариант 3.1			Вариант 3.2			
сырье, м ³	2,40	2,96	2700	2,52	2,8	2520
пар, кг/м ³	78	146	101400	80	140	112000
электроэнергия, кВт·ч/м ³	0,2	0,469	280	0,206	0,453	300
технологическая трудоемкость, чел.·ч	16,6	19,8	14940	17,1	44,6	22230
прибыль от реали- зации 1 м ³ , ден. ед.	30	54	-	28	46	-
Вариант 3.3			Вариант 3.4			
сырье, м ³	2,6	2,8	2600	2,48	3,0	2900
пар, кг/м ³	84	135	92400	79	150	94800
электроэнергия, кВт·ч/м ³	0,208	0,448	250	0,203	0,472	260
технологическая трудоемкость, чел.· ч	17,4	19,0	13920	16,9	19,9	15210
прибыль от реали- зации 1 м ³ , ден. ед.	24	43	-	29	40	-

Вариант 4. Предприятие производит два вида плит: ориентированную стружечную плиту марки ОСП-Ф и ДСтП толщиной 16 мм. При их изготовлении расходуется технологическое сырье, карандаши, технологическая щепка, фенолформальдегидная и карбамидоформальдегидная смола, парафин. Нормы их расхода, необходимые для изготовления 1 м³ плиты каждого вида, известны. Предприятие получает прибыль от реализации 1 м³ плит каждого вида в размере соответственно C_1 и C_2 ден. ед. Требуется определить план выпуска плит каждого вида, при котором затраты на его изготовление не превышали бы допустимого ресурса и была бы получена наибольшая прибыль. Исходные данные для выполнения задачи принять из табл. 2.9.

Таблица 2.9

Исходные данные для выполнения задания

Наименование используемых ресурсов	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса
	плита ОСП-Ф	плита ДСтП		плита ОСП-Ф	плита ДСтП	
	Вариант 4.1			Вариант 4.2		
технологическое сырье	1,76	0,80	2400	1,80	0,85	2700
карандаш	0,30	0,40	600	0,27	0,30	540
технологическая щепка	-	0,90	1080	-	0,90	1170
смола КФ	-	90	180000	-	90	144000
смола ФФ	110	-	132000	108	-	129600
парафин	13,5	-	18900	13,3	-	21280
прибыль от реализации 1 м ³ , ден. ед.	70	40	-	60	50	-
Вариант 4.3			Вариант 4.4			
технологическое сырье	1,82	0,82	2730	1,90	0,90	2660
карандаш	0,20	0,28	560	0,12	0,20	360
технологическая щепка	-	0,88	2200	-	0,80	1600
смола КФ	-	88	158400	-	86	137600
смола ФФ	105	-	126000	100	-	100000
парафин	13,0	-	23400	12,8	-	14080
прибыль от реализации 1 м ³ , ден. ед.	65	30	-	75	28	-

Вариант 5. Предприятие производит неламинированные и ламинированные различными видами декора плиты MDF. При их изготовлении расходуется пар, электроэнергия и трудовые ресурсы. Нормы их расхода, необходимые для изготовления 1 м³ плиты каждого вида, известны. Предприятие получает прибыль от реализации 1 м³ плит каждого вида в размере соответственно C_1 и C_2 ден. ед. Требуется определить план выпуска плит каждого вида, при котором затраты на его изготовление не превышали бы допустимого ресурса и была бы получена наибольшая прибыль. Исходные данные для выполнения задачи взять из табл. 2.10.

Таблица 2.10

Исходные данные для выполнения задания

Наименование используемых ресурсов	Получаемая продукция		Запас ресурса	Получаемая продукция		Запас ресурса
	ЛДСтП	ДСтП		ЛДСтП	ДСтП	
	Вариант 5.1			Вариант 5.2		
пар, кг/м ³	900	0	270000	850	0	240000
электроэнер- гия, кВт·ч/м ³	200	360	90000	200	150	60000
технологиче- ская трудоем- кость, чел·ч	30	10	4500	20	28	7000
контрольные цифры, шт.			-			-
Вариант 5.3			Вариант 5.4			
пар, кг/м ³	800	0	240000	700	0	210000
электроэнер- гия, кВт·ч/м ³	165	190	57000	200	120	72000
технологиче- ская трудоем- кость, чел· ч	20	40	8000	20	16,8	8400
прибыль от реализации 1 м ³ , ден. ед.	26	40	-	33	44	-

Вариант 6. Цех производит два вида продукции: шкафы и тумбы для телевизора. При их изготовлении расходуют древесностружечную плиту, листовое стекло и трудовые ресурсы. Нормы их расхода, необходимые для изготовления единицы изделия каждого вида известны. Прибыль от реализации 1 шкафа составляет C_1 , а от реализации 1 тумбы - C_2 ден. ед. Требуется определить план выпуска изделий каждого вида, при котором затраты на его изготовление не превышали бы допустимого ресурса и была бы получена наибольшая прибыль. Исходные данные для выполнения задачи взять из табл. 2.11.

Таблица 2.11

Исходные данные для выполнения задания

Наименование используемых ресурсов	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса	Наименование получаемой продукции		Запас ресурса
	шкаф	тумба		шкаф	тумба	
	Вариант 6.1			Вариант 6.2		
древесностру- жечная плита, м ²	3,5	1,0	350	2,0	1,5	600
стекло листовое, м ²	1,0	2,0	240	2,0	0	550
технологическая трудоемкость, чел.·ч	1,0	1,0	150	1,0	2,0	400
прибыль от ре- ализации за 1 из- делие, ден. ед.	200	100	-	80	120	-
Вариант 6.3			Вариант 6.4			
древесностру- жечная плита, м ²	2,0	1,5	450	2,0	1,0	300
стекло листовое, м ²	0	2,0	400	0	1,0	300
технологическая трудоемкость, чел.·ч.	3,0	1,0	400	1,5	0,5	200
прибыль от ре- ализации за 1 из- делие, ден. ед.	100	50	-	150	60	-

5. Расчет задач линейного программирования в программе «QSB»

Стартовым файлом для запуска программы является файл START BAD. Перемещение по любому диалоговому окну программы осуществляется при помощи клавиш $\leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow$. После ввода каждого числового значения в таблицу диалогового окна необходимо нажать клавишу Enter. После каждого диалогового окна внизу указывается клавиша, которую нужно нажать для перехода к следующему окну. Каждой новой задаче присваивается имя длиной до 6 символов. Текущую задачу можно сохранить на диск, редактировать, распечатывать.

6. Методические указания к выполнению работы

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

- 1) составить математическую модель задачи;
- 2) решить полученную задачу линейного программирования графическим и симплекс-методом;
- 3) показать соответствие опорных решений и вершин области допустимых значений переменных;
- 4) составить математическую модель задачи при условии, что спрос на продукцию ограничен;
- 5) проверить решение задачи на ЭВМ с помощью программы «QSB»;
- 6) оформить и защитить отчет по работе.

7. Контрольные вопросы

1. Какие методы решения задач линейного программирования Вам известны?
2. Как выглядит область допустимых решений задачи линейного программирования для двух переменных? Чем определяются ее границы?
3. Что такое градиент целевой функции? Как построить вектор градиента?
4. Как будет выглядеть область допустимых решений в задаче об оптимальном плане производства, если в неравенстве, соответствующем ограничению на один из видов ресурсов, заменить знак « \leq » на знак « \geq »?
5. В чем состоит алгоритм отыскания точки оптимума при решении задачи линейного программирования графическим способом?
6. В чем состоит алгоритм решения задачи симплекс-методом?
7. Как рассчитываются двойственные оценки при решении задачи симплекс-методом? Что является признаком оптимального плана?
8. В чем состоит анализ решения задачи линейного программирования после получения оптимального решения? На какие вопросы должен ответить этот анализ? Чем он важен при принятии управленческих решений?

Лабораторный практикум № 3

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ ПИЛОВОЧНОГО СЫРЬЯ

Цель работы: составить оптимальный план раскроя пиловочного сырья на пиломатериалы, который позволил бы выполнить заданную спецификацию пиломатериалов по критерию минимума расхода сырья.

1. Общие сведения

Деревообрабатывающая промышленность характеризуется высоким уровнем потребления древесины. Так, в лесопильном и фанерно-спичечном производствах при изготовлении столярно-строительных изделий и стро-

ганого шпона на долю древесного сырья приходится от 60 до 80 % всех затрат на изготовление продукции. Это обусловлено качеством сырья, технологическими факторами, организацией производства, иногда неумением планировать оптимальное использование сырья, особенно при раскрое.

Экономное расходование сырья является одной из важнейших задач, подлежащих решению при планировании, организации и управлении производством. Эта задача приобретает еще большую актуальность в связи с экологическими проблемами и общим дефицитом лесных запасов в экономически доступных районах страны.

Экономия сырья может быть достигнута за счет реализации оптимальных способов раскроя сырья (поставов).

2. Постановка задачи

На лесопильном предприятии имеется пиловочное сырье $m(i=1...m)$ сорторазмерных групп, которое можно раскроить $n(j=1...n)$ способами раскроя (поставами). При этом необходимо выпилить $K(k=1...K)$ сечений пиломатериалов.

При раскрое единицы сырья (одного бревна или 1 м^3) i -й сорторазмерной группы j -м поставом пиломатериалы k -го сечения образуются в количестве a_{ijk} . Объем одного бревна i -й сорторазмерной группы, распиливаемого j -м поставом составляет P_{ij} . Запасы сырья i -й сорторазмерной группы составляют N_i . Количество пиломатериалов k -го сечения, которые необходимо выпустить по плану, составляют B_k .

Определить x_{ij} - количество единиц сырья i -й сорторазмерной группы, которое нужно распилить j -м поставом так, чтобы выполнить заданную спецификацию пиломатериалов при условии минимального расхода сырья.

3. Алгоритм решения

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

1) построить для каждой заданной сорторазмерной группы сырья способ раскроя бревен на пиломатериалы (постав). Определить количество пиломатериалов, получаемых из одного постава определенного сечения, задаваемого в спецификации пиломатериалов.

2) построить математическую модель. Целевая функция математической модели отражает требование минимизации расходов сырья при его раскрое на пиломатериалы:

$$L = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (3.1)$$

где P_{ij} - P_{ij} - объем одного бревна i -й сорторазмерной группы, раскраиваемых по j -му варианту раскроя, м^3 ;

x_{ij} - количество бревен i -й сорторазмерной группы, раскраиваемых по j -му варианту раскроя, шт.

В качестве ограничений выступают:

а) количество получаемых пиломатериалов каждого сечения. Оно должно быть больше или равно количеству пиломатериалов, заданных в спецификации пиломатериалов:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ijk} x_{ij} \geq B_k \quad (k = 1 \dots K), \quad (3.2)$$

где a_{ijk} - a_{ijk} объем пиломатериалов k -го сечения, которое раскраивается из бревен i -й сорторазмерной группы по j -му варианту раскроя, м³,

B_k B_k - количество пиломатериалов k -го сечения, которое необходимо получить по заданной спецификации пиломатериалов, м³.

б) количество израсходованного сырья. Оно не должно превышать количество имеющегося на предприятии сырья каждой сорторазмерной группы:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq N_i \quad (i = 1 \dots m), \quad (3.3)$$

где N_i - N_i количество бревен i -й сорторазмерной группы, заданное в спецификации сырья, шт.;

в) ограничения на неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0. \quad (3.4)$$

В матрично-векторной форме модель оптимизации имеет вид:

$$\begin{aligned} \min P^m, \\ AX \geq B, \\ X \leq N, \\ X \geq 0; \end{aligned} \quad (3.5)$$

1) вектор значений целевой функции

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

2) вектор управляющих факторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

3) матрица объемов пиломатериалов по поставкам

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad (3.8)$$

4) вектор запасов сырья

$$N = \begin{vmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{vmatrix}, \quad (3.9)$$

5) матрица применимости поставок к сырью

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

На предприятии имеется пиловочное сырье хвойных пород древесины нескольких диаметров, приведенное в табл. 3.1. Спецификация пиломатериалов, которую необходимо выполнить, приведена в табл. 3.2. Способ раскря – распиловка с брусочкой. Требуется составить оптимальный план раскря пиловочного сырья, обеспечивающий минимальный расход сырья (бревен) при условии выполнения заданной спецификации пиломатериалов.

Таблица 3.1

Спецификация сырья

d , см	L , м	$q_{бр}$, м ³	N , шт.	Q , м ³
22	5,5	0,264	45000	11880
28	5,5	0,408	37000	15096
итого			82000	26976

3.1. Составить спецификацию сырья (см. табл. 3.1). Для определения объема бревна воспользоваться формулой:

$$q_{бр} = \frac{\pi \left(\frac{d + D}{2} \right)^2}{4} L, \quad (3.11)$$

где d - диаметр бревна в вершинном торце, м,

D - диаметр бревна в комлевом торце, м;

L - длина бревна, м.

$$D = d + SL, \quad (3.12)$$

где S - сбеги бревна, см/м (в данной задаче будем считать сбеги нормальным, составляющим 1 см/м).

3.2. Составить спецификацию пиломатериалов (табл. 3.2). При определении общего объема пиломатериалов на программу в спецификации пиломатериалов задаться величиной ожидаемого объема. В задаче данную величину принять равной 55 % от объема сырья.

3.3. Составить восемь постав (т.е. на каждую сорторазмерную группу сырья по четыре постава). При составлении воспользоваться тем, что в один постав не следует устанавливать более двух ведущих толщин пиломатериалов одного бокового сечения (р.ш., р.д.). Составленные на миллиметровой бумаге графики-квадранты следует приводить в приложении к отчету работы.

Таблица 3.2

Спецификация пиломатериалов

Размеры пиломатериалов			Количество пиломатериалов	
T , мм	$Ш$, мм	$Д$, м	на 1000 м ³	на программу
60	150	5,5	300	4451
40	125	5,5	335	4970,3
22	р.ш.	р.д.	205	3041,6
16	р.ш.	р.д.	160	2373,9
итого			1000	14836,8

3.4. Выполнить расчет выхода пиломатериалов. Полученные результаты расчетов свести в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Расчет выхода пиломатериалов

Номер постава	Количество пиломатериалов, м ³ , сечением, мм×мм				Объем бревна, м ³	Объемный выход, %
	60×150	40×125	22×р.ш.	16×р.ш.		
1	—	0,11	0,047	—	0,264	59,5
2	—	0,11	—	0,0412	0,264	57,3
3	0,099	—	0,048	0	0,264	55,8
4	0,099	—	—	0,056	0,264	58,7
5	—	0,1375	0,086	—	0,408	54,7
6	—	0,1375	—	0,137	0,408	67,2
7	0,1485	—	0,091	—	0,408	58,7
8	0,1485	—	—	0,101	0,408	61,2

3.5. Сформировать математическую модель оптимизации.

Целевая функция:

$$L = 0,264x_1 + 0,264x_2 + 0,264x_3 + 0,264x_4 + 0,408x_5 + 0,408x_6 + 0,408x_7 + 0,408x_8 \rightarrow \min.$$

Система ограничений:

а) по выпуску пиломатериалов:

$$\begin{aligned} 0,099x_3 + 0,099x_4 + 0,1485x_7 + 0,1485x_8 &\geq 4451, \\ 0,11x_1 + 0,11x_2 + 0,1375x_5 + 0,1375x_6 &\geq 4970,3, \\ 0,047x_1 + 0,048x_3 + 0,086x_5 + 0,091x_7 &\geq 3041,6, \\ 0,0412x_2 + 0,056x_4 + 0,137x_6 + 0,101x_8 &\geq 2373,9; \end{aligned}$$

б) по запасам сырья:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 45000,$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 37000;$$

в) на неотрицательность переменных:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0, \quad x_8 \geq 0.$$

В матрично-векторной форме:

1) вектор значений целевой функции

$$P = \begin{pmatrix} 0,264 \\ 0,264 \\ 0,264 \\ 0,264 \\ 0,408 \\ 0,408 \\ 0,408 \\ 0,408 \end{pmatrix},$$

2) вектор управляющих факторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix},$$

3) матрица объемов пиломатериалов по поставкам

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,099 & 0,099 & 0 & 0 & 0,1485 & 0,1485 \\ 0,11 & 0,11 & 0 & 0 & 0,1375 & 0,1375 & 0 & 0 \\ 0,047 & 0 & 0,048 & 0 & 0,086 & 0 & 0,091 & 0 \\ 0 & 0,0412 & 0 & 0,056 & 0 & 0,137 & 0 & 0,101 \end{pmatrix},$$

4) вектор запасов сырья

$$N = \begin{pmatrix} 45000 \\ 37000 \end{pmatrix},$$

5) матрица применимости поставок к сырью

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.6. Ввести полученную математическую модель оптимизации в компьютер. Используя программу для решения задач линейного программирования «QSB», найти значения управляющих факторов. Вектор решений будет иметь вид:

Таблица 3.4

Оптимальный план раскроя пиловочного сырья

Номер поставы	Диаметр бревна, см	Количество распиливаемых бревен, шт.	Объем распиливаемых бревен, м ³	Спецификация пиломатериалов				
				толщина, мм	60	40	22	16
				ширина, мм	150	125	р.ш.	р.ш.
				длина, м	5,5	5,5	р.д.	р.д.
				Объем по плану, м ³ Объем работ по поставу, м ³	4451	4970,3	3041,6	2373,9
1	22	38822	10249,01	6095,05	-	4270,42	1824,63	-
6	28	5090	2076,72	1397,21	-	699,88	-	697,33
7	28	13373	5456,18	3202,83	1985,89	-	1216,94	-
8	28	16600	6772,8	4141,7	2465,1	-	-	1676,6
ИТОГО		73885	24554,71	14836,79	4450,91	4970,35	4249,98	2373,89

$$X^* = \begin{vmatrix} 38822 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5090 \\ 13373 \\ 16600 \end{vmatrix}.$$

3.7. Составить оптимальный план раскроя пиловочного сырья по критерию минимального расхода сырья (табл. 3.4).

3.8. Рассчитать объемный выход (Θ , %) пиломатериалов по формуле:

$$\Theta = \frac{Q_{пост}}{Q_{бр}} 100,$$

$$\Theta = \frac{14836,79}{2454,71} \cdot 100 = 60,4 \%,$$

где $Q_{пост}$ - суммарный объем работ по поставу, м³;

$Q_{бр}$ - суммарный объем распиливаемых бревен, м³.

3.9. Сделать выводы по работе.

4. Задания для индивидуального решения

Исходные данные для решения задачи о составлении оптимального плана раскроя пиловочного сырья представлены в табл. 3.5. Порода древесины во всех вариантах хвойная, способ распиловки – распиловка с брусом. При определении общего объема пиломатериалов на программу в спецификации пиломатериалов задаться величиной ожидаемого объема, равной 55 % от объема сырья.

Таблица 3.5

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Исходное сырье			Получаемые пиломатериалы			
	диаметр, см	длина, м	кол-во, шт.	толщина, мм	ширина, мм	длина, м	кол-во п/м на 1000 м ³
1	24	5,0	55000	44	125	5,0	340
	34	5,0	39000	50	150	5,0	270
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	230
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	160

Продолжение табл. 3.5

Номер варианта	Исходное сырье			Получаемые пиломатериалы			
	диа- метр, см	длина, м	кол-во, шт.	толщи- на, мм	ширина, мм	длина, м	кол-во п/м на 1000 м ³
2	32	5,5	45000	40	125	5,5	335
	38	5,5	37000	60	150	5,5	300
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	205
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	160
3	24	5,5	64000	50	150	5,5	325
	30	5,5	68000	60	175	5,5	305
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	245
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	125
4	20	5,0	52000	32	100	5,0	325
	32	5,0	32000	44	125	5,0	300
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	200
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	175
5	24	5,5	71000	60	200	5,5	340
	32	5,5	63000	44	175	5,5	270
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	230
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	160
6	26	5,0	93000	50	225	5,0	320
	30	5,0	81000	40	200	5,0	260
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	240
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	180
7	28	6,0	32000	60	175	6,0	325
	30	6,0	39000	40	200	6,0	255
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	215
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	205
8	24	4,0	27000	32	150	4,0	315
	28	4,0	34000	40	175	4,0	325
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	220
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	140
9	26	6,0	68000	44	200	6,0	340
	32	6,0	75000	60	175	6,0	270
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	230
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	160
10	24	5,5	71000	60	125	5,5	295
	28	5,5	74000	44	150	5,5	290
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	235
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	180
11	24	5,0	45000	44	150	5,0	325
	32	5,0	51000	50	125	5,0	305
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	245
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	125

Продолжение табл. 3.5

Номер варианта	Исходное сырье			Получаемые пиломатериалы			
	диа- метр, см	длина, м	кол-во, шт.	толщи- на, мм	ширина, мм	длина, м	кол-во п/м на 1000 м ³
12	22	4,5	78000	32	125	4,5	325
	30	4,5	50000	60	150	4,5	375
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	230
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	170
13	26	4,0	58000	50	200	4,0	310
	34	4,0	61000	44	175	4,0	260
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	240
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	190
14	26	4,0	50000	40	200	4,0	300
	30	4,0	45000	50	150	4,0	270
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	240
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	190
15	26	4,0	35000	44	125	4,0	325
	32	4,0	52000	60	200	4,0	300
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	200
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	175
16	22	5,5	55000	44	150	5,5	330
	28	5,5	65000	50	125	5,5	290
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	210
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	170
17	20	4,0	60000	32	100	4,0	330
	24	4,0	45000	44	125	4,0	270
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	205
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	195
18	24	6,0	27000	32	150	6,0	315
	28	6,0	34000	40	175	6,0	325
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	220
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	140
19	26	4,5	34000	44	175	4,5	320
	32	4,5	29000	50	200	4,5	320
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	200
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	160
20	28	5,0	53000	40	200	5,0	330
	34	5,0	61000	60	225	5,0	340
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	200
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	130
21	28	5,5	77000	60	200	5,5	370
	32	5,5	81000	50	175	5,5	250
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	220
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	160

Окончание табл. 3.5

Номер варианта	Исходное сырье			Получаемые пиломатериалы			
	диаметр, см	дли- на, м	кол-во, шт.	толщи- на, мм	ширина, мм	длина, м	кол-во п/м на 1000 м ³
22	22	4,5	45500	40	125	4,5	335
	28	4,5	37500	60	150	4,5	300
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	205
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	160
23	24	4,0	46700	44	175	4,0	320
	30	4,0	33200	50	150	4,0	320
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	200
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	160
24	26	6,0	59000	32	150	6,0	290
	32	6,0	44000	44	175	6,0	305
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	215
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	190
25	24	5,5	28000	40	125	5,5	295
	36	5,5	30000	50	200	5,5	270
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	235
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	200
26	20	4,0	34500	32	125	4,0	315
	32	4,0	37000	60	150	4,0	280
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	215
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	190
27	28	4,5	28500	32	200	4,5	250
	32	4,5	32500	50	225	4,5	305
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	240
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	205
28	22	6,0	41500	40	125	6,0	335
	30	6,0	37500	60	150	6,0	300
	-	-	-	22	р.ш.	р.д.	205
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	160
29	26	4,0	44500	32	150	4,0	315
	36	4,0	39500	44	200	4,0	275
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	230
	-	-	-	16	р.ш.	р.д.	180
30	24	4,5	29500	40	150	4,5	325
	34	4,5	36500	50	175	4,5	295
	-	-	-	25	р.ш.	р.д.	225
	-	-	-	19	р.ш.	р.д.	155

5. Методические указания к выполнению работы

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

- 1) разработать варианты раскроя бревен на пиломатериалы (поставы);
- 2) составить математическую модель задачи;
- 3) решить задачу на компьютере с использованием задачи линейного программирования «QSB»;
- 4) составить оптимальный план раскроя пиловочного сырья по критерию минимального расхода сырья;
- 5) оформить и защитить отчет по работе.

6. Контрольные вопросы

1. В чем состоит эффективность применения методов оптимизации при раскрое пиловочного сырья на пиломатериалы?
2. Назовите критерии и ограничения, используемые при формировании математической модели?
3. По каким критериям можно еще решить задачу об оптимальном плане раскроя пиловочного сырья?
4. В результате раскроя бревен на пиломатериалы получились значения $x_1 = 45000$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 148$, $x_7 = 14760$, $x_8 = 18959$. Прокомментируйте полученное решение.
5. Как оценить полезный выход пиломатериалов? В результате принятия каких решений можно повысить процент полезного выхода пиломатериалов?
6. Какая информация необходима для постановки задачи формирования математической модели раскроя пиловочного сырья и выполнения расчета при оптимизации по критерию «минимум отходов», «максимум объемного выхода»?

Лабораторный практикум № 4

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСКРОЯ ПЛИТНЫХ И ЛИСТОВЫХ ДРЕВЕСНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Цель работы: составить оптимальный план раскроя плитных материалов, который позволил бы выполнить заданную спецификацию на заготовки по критерию минимума отходов.

1. Общие сведения

В производстве изделий из древесины широко используются плитные листовые материалы, изготовленные в соответствии с требованиями стандартов. Получаемые предприятиями стандартные форматы этих материа-

лов раскраивают на заготовки нужных размеров. Основными ограничениями при раскрое являются количество и размеры заготовок. Количество типоразмеров заготовок должно соответствовать их комплектности на выпуск изделий, предусмотренных программой.

Для достижения оптимального плана предварительно разрабатываются карты раскроя, представляющие собой графическое расположение заготовок на стандартном формате раскраиваемого материала. Эффективность раскроя по рациональности использования материалов оценивается площадью отходов, образовавшихся при раскрое форматов, которая определяется:

$$\Delta S = S_{nl} - \sum_{k=1}^K S_{zag}, \quad (4.1)$$

где ΔS - площадь отходов, m^2 ;

S_{nl} - площадь плитного листового материала, m^2 ;

$\sum_{k=1}^K S_{zag}$ - суммарная площадь заготовок, m^2 .

При разработке карт раскроя требуется соблюдать следующие условия:

- максимальный выход деталей;
- минимальное количество типоразмеров деталей при раскрое одного формата любого материала;
- минимальное повторение одних и тех же деталей в разных картах раскроя;
- обеспечение минимума отходов.

Оптимальный план раскроя плитных листовых материалов – это совокупность различных карт раскроя с указанием количества листов плитного материала, раскраиваемых по каждой из карт, при условии обеспечения комплектности заготовок и минимума отходов. При составлении карт раскроя оставляют только приемлемые варианты, которые обеспечивают выход деталей не менее установленного предела. Процедура оптимизации процесса раскроя на предприятии, как правило, решается с помощью ЭВМ. Решению задачи предшествует формирование математической модели.

2. Постановка задачи

На предприятии имеются плиты ДСтП $m(i=1 \dots m)$ форматов, которые можно раскроить $n(j=1 \dots n)$ картами раскроя. При этом необходимо выпилить $K(k=1 \dots K)$ типоразмеров заготовок.

При раскрое одного листа ДСтП i -го формата по j -й карте раскроя заготовки k -го типоразмера образуются в количестве a_{ijk} . Количество отходов, которое образуется при раскрое i -го формата плиты, распиливаемого по j -й карте раскроя, составляют P_{ij} . Запасы плит ДСтП i -го формата на предприятии составляют N_i . Количество заготовок k -го сечения, которое необходимо выпустить по плану, составляет B_k .

Определить x_{ij} - количество листов ДСтП i -го формата, которое нужно распилить по j -й карте раскроя так, чтобы выполнить заданную спецификацию заготовок при условии получения минимального количества отходов.

3. Алгоритм решения

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

1) построить для каждого заданного формата плит ДСтП карту раскроя на заготовки по типоразмерам, заданным в спецификации заготовок. Определить количество заготовок, получаемых из одного формата плит ДСтП определенного типоразмера, задаваемого в спецификации заготовок;

2) построить математическую модель. Целевая функция математической модели отражает требование минимизации отходов при раскрое плит ДСтП на заготовки:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (4.2)$$

где P_{ij} - количество отходов, получаемых из одной плиты ДСтП i -го формата, раскраиваемых по j -й карте раскроя, м^2 ;

x_{ij} - количество плит ДСтП i -го формата, раскраиваемых по j -й карте раскроя, шт.

В качестве ограничений выступают:

а) количество получаемых заготовок каждого типоразмера. Оно должно быть больше или равно количеству заготовок, заданных в спецификации заготовок:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ijk} x_{ij} \geq B_k \quad (k = 1 \dots K), \quad (4.3)$$

где a_{ijk} - количество заготовок k -го типоразмера, которое раскраивается на плиты ДСтП i -го формата по j -й карте раскроя, шт.;

B_k - количество заготовок k -го типоразмера, которое необходимо получить по заданной спецификации заготовок, шт.;

б) количество израсходованных плит ДСтП должно равняться количеству имеющегося на предприятии плит ДСтП каждого формата:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \geq N_i \quad (i = 1 \dots m), \quad (4.4)$$

где N_i - количество плит ДСтП i -го формата, заданное в спецификации плит, шт.;

в) ограничения на неотрицательность переменных:

$$x_{ij} \geq 0. \quad (4.5)$$

В матрично-векторной форме модель оптимизации имеет вид:

$$\begin{aligned} \min P^m, \\ AX \geq B, \\ X \leq N, \\ X \geq 0; \end{aligned} \quad (4.6)$$

1) вектор значений целевой функции

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

2) вектор управляющих факторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

3) матрица выхода заготовок по картам раскроя

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

4) вектор запасов плит ДСтП

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

5) матрица применимости карт раскроя к плитам ДСтП

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

4. Пример решения задачи

На предприятии имеется древесностружечные плиты (ДСтП) нескольких форматов, приведенные в табл. 4.1. Спецификация заготовок, которую

необходимо выполнить, приведена в табл. 4.2. Требуется составить оптимальный план раскроя плит ДСтП на заготовки по критерию минимума отходов, при условии выполнения заданной спецификации заготовок.

4.1. Составить спецификацию плит ДСтП (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1

Спецификация плит ДСтП

№ п/п	Формат плиты, мм×мм	Количество плит, шт.
1	2440×1220	8000
2	1525×1525	6000
итого		14000

4.2. Составить спецификацию заготовок (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Спецификация заготовок

№ п/п	Формат плиты, мм×мм	Количество заготовок на программу, шт.
1	1000×600	12000
2	800×600	12000
3	600×600	18000
4	300×450	12000
5	300×300	24000
итого		78000

4.3. Составить не менее восьми карт раскроя. При составлении карт раскроя следует помнить, что они составляются на годовую программу, поэтому отходы от раскроя могут возникать только от некратности типовых размеров заготовок, которые требуется выпилить по спецификации заготовок. Составленные на миллиметровой бумаге карты раскроя следует приводить в приложении к отчету работы.

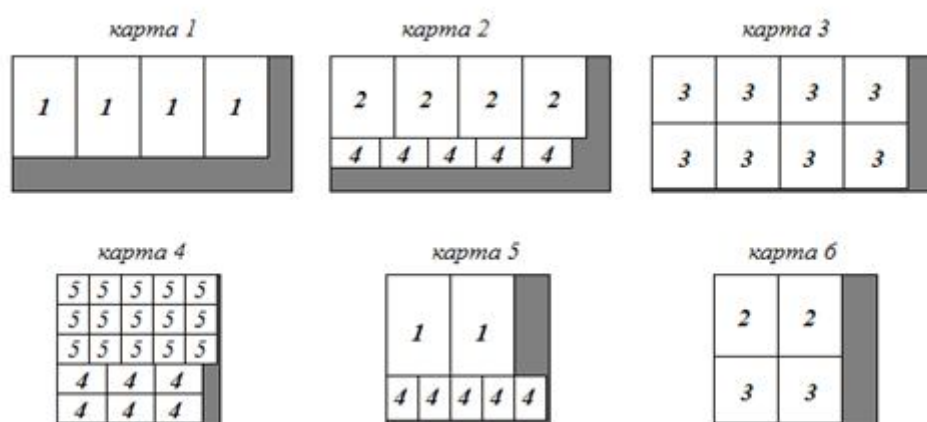


Рис. 4.1. Составленные карты раскроя

4.4. Выполнить расчет количества получаемых заготовок. Полученные результаты расчетов свести в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Расчет количества заготовок

Номер заготовки	Количество заготовок, шт. получаемых по карте раскроя					
	1	2	3	4	5	6
1	4	-	-	-	2	-
2	-	4	-	-	-	2
3	-	-	8	-	-	2
4	-	5	-	6	5	-
5	8	-	-	15	-	-
площадь отходов, м ²	0,577	0,382	0,097	0,166	0,586	0,646

4.5. Сформировать математическую модель оптимизации.

Целевая функция:

$$L = 0,577x_1 + 0,382x_2 + 0,097x_3 + 0,166x_4 + 0,586x_5 + 0,646x_6 \rightarrow \min .$$

Система ограничений:

а) по выпуску заготовок:

$$4x_1 = 12000 ,$$

$$4x_2 + 2x_6 = 12000 ,$$

$$8x_3 + 2x_6 = 18000 ,$$

$$5x_2 + 6x_4 + 4x_5 = 12000 ,$$

$$15x_4 = 24000 ;$$

б) по запасам сырья:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 12000;$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 8000;$$

в) на неотрицательность переменных:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0.$$

В матрично-векторной форме:

1) вектор значений целевой функции

$$P = \begin{pmatrix} 0,577 \\ 0,382 \\ 0,097 \\ 0,166 \\ 0,586 \\ 0,646 \end{pmatrix} ,$$

2) вектор управляющих факторов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix},$$

3) матрица выхода заготовок по картам раскроя

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \end{pmatrix},$$

4) вектор запасов плит ДСтП

$$N = \begin{pmatrix} 12000 \\ 8000 \end{pmatrix},$$

5) матрица применимости карт раскроя к плитам

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.6. Ввести полученную математическую модель оптимизации в компьютер. Используя программу для решения задач линейного программирования «QSB», найти значения управляющих факторов. Вектор решений будет иметь вид:

$$X^* = \begin{pmatrix} 3000 \\ 480 \\ 990 \\ 1600 \\ 0 \\ 5040 \end{pmatrix},$$

4.7. Составить оптимальный план раскроя плит ДСтП по критерию минимального количества отходов (табл. 4.4).

4.8. Сделать выводы по работе.

Таблица 4.4

Оптимальный план раскроя плит ДСтП

Номер карты раскроя	Количество распиливаемых плит, шт.	Спецификация заготовок					
		Типоразмер заготовки, мм×мм	1000×600	800×600	600×600	300×450	300×300
		Объем по плану, шт. Объем работ по карте раскроя, шт.	12000	12000	18000	12000	24000
1	3000	12000	12000	—	—	—	—
2	480	4320	—	1920	—	2400	—
3	990	7920	—	—	7920	—	—
4	1600	33600	—	—	—	9600	24000
6	5040	20160	—	10080	10080	—	—
итого		78000	12000	12000	18000	12000	24000

5. Задания для индивидуального решения

Исходные данные для решения задачи о составлении оптимального плана раскроя плит ДСтП представлены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Исходные данные для решения задачи

Номер варианта	Исходное сырье		Получаемые заготовки		
	формат плит, мм×мм	запас плит, шт.	типоразмер, мм×мм	кол-во в изделии, шт.	годовая программа, шт.
1	2440×1220	19000	1000×550	2	9000
	1525×1525	15000	800×330	3	
	—	—	550×550	5	
	—	—	400×1200	2	
	—	—	400×550	2	
2	2440×1220	11000	750×750	2	5000
	1525×1525	9000	750×300	3	
	—	—	1000×500	4	
	—	—	1000×300	2	
	—	—	300×300	2	
3	1830×1830	8000	900×900	2	2700
	1525×1525	5000	900×450	5	
	—	—	900×300	4	
	—	—	1000×600	2	
	—	—	600×600	3	
4	1830×1830	11000	1200×750	2	4000
	1525×1525	7000	750×400	3	
	—	—	750×750	4	
	—	—	400×400	4	
	—	—	330×750	5	
5	1830×1830	6500	600×400	3	3500
	2440×1220	9500	1200×600	3	
	—	—	600×500	2	
	—	—	300×300	3	
	—	—	400×400	5	
6	1830×1830	16500	500×500	3	6500
	2440×1220	10500	700×500	2	
	—	—	900×500	3	
	—	—	400×500	2	
	—	—	400×400	4	
7	2440×1220	7000	850×380	4	4500
	3500×1750	12500	1200×600	2	
	—	—	600×600	2	
	—	—	600×500	3	
	—	—	500×500	3	

Продолжение табл. 4.5

Номер варианта	Исходное сырье		Получаемые заготовки		
	формат плит, мм×мм	запас плит, шт.	типоразмер, мм×мм	кол-во в изделии, шт.	годовая программа, шт.
8	2440×1220	13500	900×500	2	8000
	3500×1750	16500	700×500	2	
	—	—	900×700	3	
	—	—	400×500	2	
	—	—	400×400	4	
9	3500×1750	12000	1000×700	3	5000
	2750×1750	7000	700×470	3	
	—	—	520×520	4	
	—	—	470×1000	2	
	—	—	470×470	4	
10	3500×1750	18500	600×500	4	9500
	2750×1750	16500	600×1000	2	
	—	—	600×380	4	
	—	—	1700×380	2	
	—	—	600×600	4	
11	2750×1750	18000	700×700	2	12000
	2440×1220	26000	700×400	4	
	—	—	1100×500	4	
	—	—	1100×400	2	
	—	—	400×400	3	
12	2750×1750	13500	610×350	4	7000
	2440×1220	12500	610×440	2	
	—	—	610×800	6	
	—	—	1200×440	2	
	—	—	440×440	4	
13	2440×1220	8000	1000×450	2	3000
	1525×1525	3500	800×450	2	
	—	—	900×900	4	
	—	—	600×300	3	
	—	—	600×600	4	
14	2440×1220	7500	480×800	4	4000
	1525×1525	900	480×900	3	
	—	—	480×450	3	
	—	—	800×800	6	
	—	—	700×480	2	
15	1525×1525	4000	600×600	2	2500
	3500×1750	8000	600×380	4	
	—	—	1050×580	4	
	—	—	1050×380	3	
	—	—	380×380	3	

Продолжение табл. 4.5

Номер варианта	Исходное сырье		Получаемые заготовки		
	формат плит, мм×мм	запас плит, шт.	типоразмер, мм×мм	кол-во в изделии, шт.	годовая программа, шт.
16	1525×1525	13500	640×320	4	6000
	3500×1750	9500	640×440	2	
	—	—	640×330	6	
	—	—	1100×440	2	
	—	—	440×440	4	
17	3500×1750	26000	1000×550	2	10000
	2440×1220	10000	800×350	3	
	—	—	550×550	5	
	—	—	400×1200	2	
	—	—	400×550	2	
18	3500×1750	18000	500×500	2	7500
	2440×1220	10500	700×500	2	
	—	—	900×500	3	
	—	—	400×500	3	
	—	—	400×400	4	
19	2440×1220	13000	1200×480	2	6300
	2750×1750	11000	480×900	3	
	—	—	480×480	5	
	—	—	900×900	3	
	—	—	1200×900	2	
20	2440×1220	25000	1050×550	2	8500
	2750×1750	18000	1050×700	2	
	—	—	700×700	3	
	—	—	550×550	3	
	—	—	350×700	4	
21	1525×1525	6500	950×370	2	5500
	3500×1750	19000	1650×650	2	
	—	—	950×950	3	
	—	—	370×700	3	
	—	—	370×370	6	
22	1525×1525	17500	1250×720	2	7700
	3500×1750	9500	720×720	5	
	—	—	1250×420	3	
	—	—	420×420	6	
	—	—	600×720	3	
23	3500×1750	15000	1300×580	3	8000
	2440×1220	19000	580×880	2	
	—	—	800×880	3	
	—	—	580×400	4	
	—	—	580×580	4	

Окончание табл. 4.5

Номер варианта	Исходное сырье		Получаемые заготовки		
	формат плит, мм×мм	запас плит, шт.	типоразмер, мм×мм	кол-во в изделии, шт.	годовая программа, шт.
24	3500×1750	25000	660×800	4	11000
	2440×1220	15000	400×660	4	
	—	—	1050×660	2	
	—	—	660×660	5	
	—	—	800×400	2	
25	2440×1220	19000	950×700	3	7200
	2750×1750	7000	1820×950	2	
	—	—	1820×700	2	
	—	—	530×530	4	
	—	—	530×700	3	
26	2440×1220	17500	870×1000	2	5200
	2750×1750	6500	870×650	3	
	—	—	650×650	2	
	—	—	870×400	3	
	—	—	400×400	5	
27	2750×1750	9500	1250×880	2	3700
	1830×1830	9500	1250×500	2	
	—	—	880×500	6	
	—	—	880×880	2	
	—	—	500×500	4	
28	2750×1750	11500	750×830	4	4500
	1830×1830	6700	830×1350	3	
	—	—	750×1350	2	
	—	—	400×750	5	
	—	—	750×750	3	
29	3500×1830	35000	700×400	3	13000
	1830×1830	24000	770×1820	2	
	—	—	770×770	4	
	—	—	400×1820	2	
	—	—	400×400	5	
30	3500×1830	27000	1500×700	2	9800
	1830×1830	21000	1500×550	2	
	—	—	550×550	3	
	—	—	350×550	6	
	—	—	700×700	4	

6. Методические указания к выполнению работы

Для решения задачи необходимо выполнить следующие действия:

- 1) разработать варианты раскроя плит ДСтП на заготовки (карты раскроя);
- 2) составить математическую модель задачи;
- 3) решить задачу на компьютере с использованием задачи линейного программирования «QSB»;
- 4) составить оптимальный план раскроя плит ДСтП по критерию минимального количества получаемых отходов;
- 5) оформить и защитить отчет по работе.

7. Контрольные вопросы

1. Что такое карта раскроя? Приведите примеры.
2. Какие критерии применимы при решении задачи оптимизации раскроя плитных материалов? Какие из них предпочтительнее в том или ином случае?
3. Проанализируйте содержание ограничений модели и возможные формы их представления. В каких случаях целесообразны те или иные из них и почему? Приведите примеры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пижурин, А.А. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки / А.А. Пижурин, М.С. Розенблит. – М.: Лесная промышленность, 1988.
2. Пижурин, А.А. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки / А.А. Пижурин. – М.: Лесная промышленность, 2004.
3. Бучнева, Е.А. Моделирование и оптимизация процессов деревообработки: лаб. практикум для студентов специальности 1-460102 «Технология деревообрабатывающих производств» / Е.А. Бучнева, Н.В. Мазаник. – Минск.: БГТУ, 2006.
4. Чубинский, А.Н. Формирование клеевых соединений древесины / А.Н. Чубинский. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
5. Перепелицкий, С.Н. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении на предприятиях лесной промышленности С.Н. Перепелицкий. – М.: Лесная пром-ть, 1989.
6. Таха, Х.А. Введение и исследование операций: 2 т. / Х.А. Таха. – М.: Мир, 1985.
7. Венцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методологии / Е.С. Венцель. – М.: Высшая школа, 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Лабораторный практикум № 1. Моделирование процесса отверждения клея. Аналитическое определение продолжительности склеивания	4
Лабораторный практикум № 2. Задача формирования производствен- ной программы предприятия	12
Лабораторный практикум № 3. Задача оптимального раскроя пило- вочного сырья	29
Лабораторный практикум № 4. Задача оптимального раскроя плитных и листовых древесных материалов	40
Список литературы	52



И.В. Яцун
О.Н. Чернышев

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ДЕРЕВООБРАБОТКИ

ЧАСТЬ 1

Екатеринбург
2011